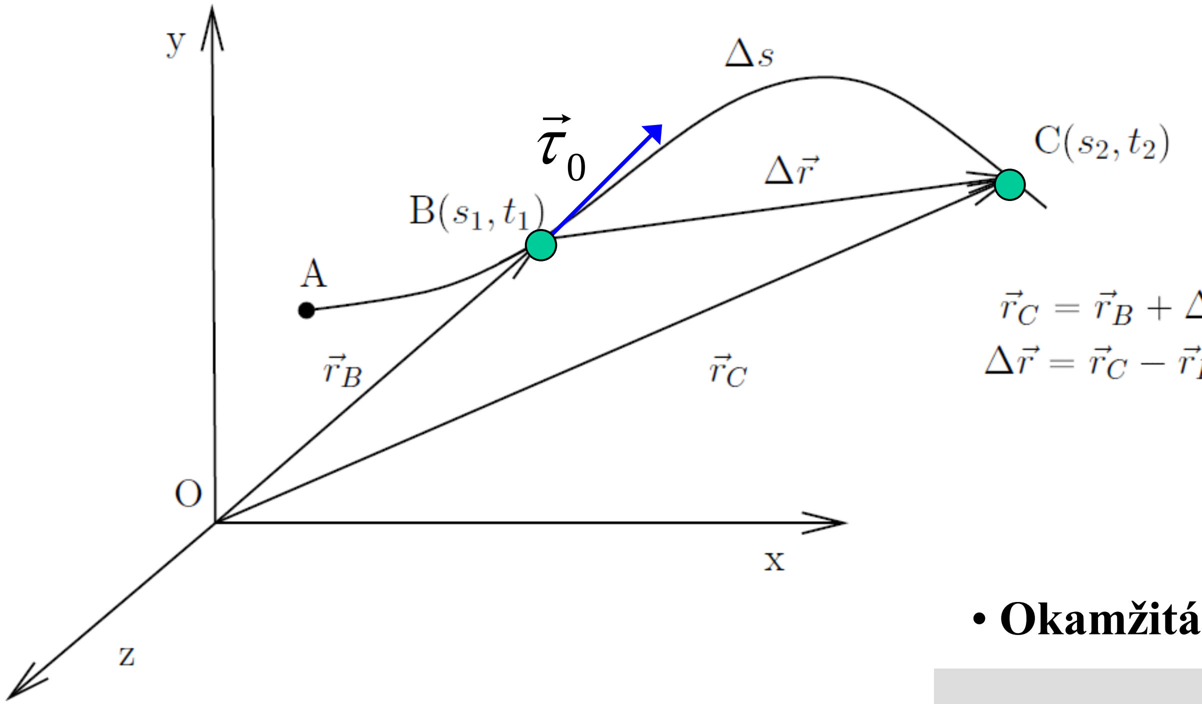
Opakování - Rychlost

- K popisu časového průběhu pohybu hmotného bodu zavádí **kinematika** veličiny **rychlost** a **zrychlení**.



$$\vec{r}_C = \vec{r}_B + \Delta\vec{r}$$
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_C - \vec{r}_B$$

- Při přibližování bodu C k bodu B přejde $\Delta\vec{r}$ na vektor $d\vec{r}$, který bude mít směr tečny k dráze $\vec{\tau}_0$ a velikost ds.
  Potom:

$$d\vec{r} = ds \cdot \vec{\tau}_0$$

- **Okamžitá rychlost hmotného bodu:**

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}_0 = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Obloukový element křivky 2D

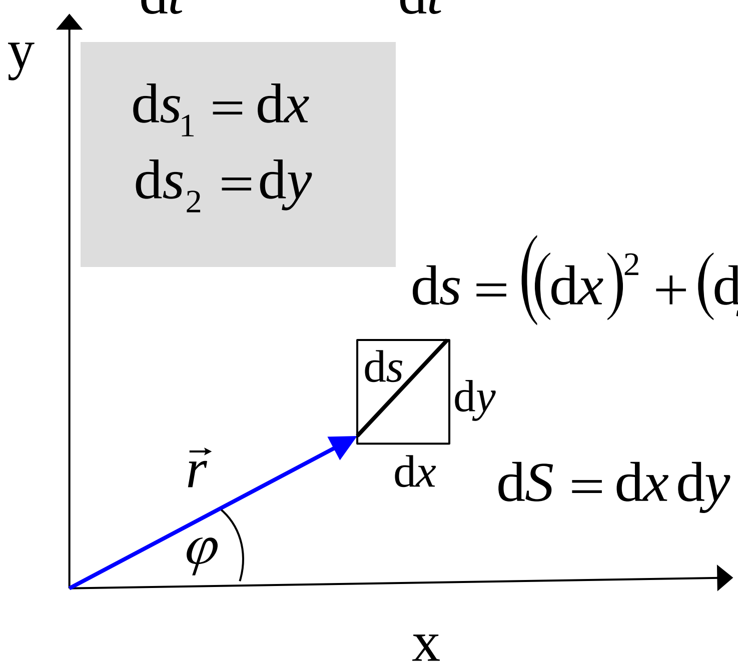
kartézské souřadnice:

$$ds = \left(\left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} dt$$

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt}, \; v_x = \frac{dy(t)}{dt} \Rightarrow ds = v\, dt$$

$$ds_1 = dx$$
$$ds_2 = dy$$

$$ds = \left((dx)^2 + (dy)^2 \right)^{1/2}$$



$$dS = dx\, dy$$

polární souřadnice:

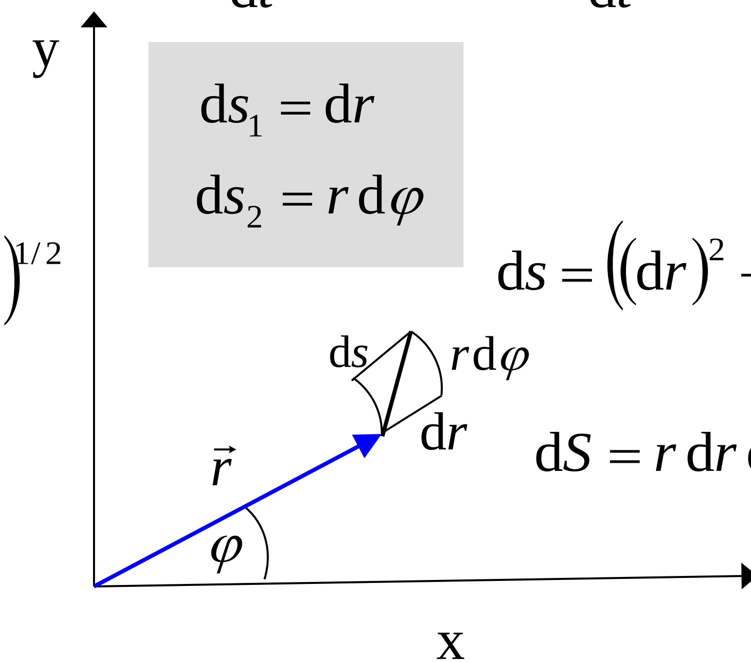
$$x = r(t) \cos\varphi(t) \qquad dx/dt = \cos\varphi\, dr/dt - r \sin\varphi\, d\varphi/dt$$
$$y = r(t) \sin\varphi(t) \qquad dy/dt = \sin\varphi\, dr/dt + r \cos\varphi\, d\varphi/dt$$

$$ds = \left(\left(\frac{dr(t)}{dt} \right)^2 + \left(r(t) \frac{d\varphi(t)}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} dt$$

$$v_r = \frac{dr(t)}{dt}, \; v_\varphi = r(t) \frac{d\varphi(t)}{dt} \Rightarrow ds = v\, dt$$

$$ds_1 = dr$$
$$ds_2 = r\, d\varphi$$

$$ds = \left((dr)^2 + (r\, d\varphi)^2 \right)^{1/2}$$



$$dS = r\, dr\, d\varphi$$

Obloukový element křivky 3D

- parametrické vyjádření trajektorie $\vec{r} = \vec{r}(t)$

kartézské souřadnice	cylindrické souřadnice	sférické souřadnice
$x = x(t)$	$\rho = \rho(t)$	$r = r(t)$
$y = y(t)$	$\varphi = \varphi(t)$	$\vartheta = \vartheta(t)$
$z = z(t)$	$z = z(t)$	$\varphi = \varphi(t)$

- rychlost $\vec{v} = \vec{v}(t)$

kartézské souřadnice	cylindrické souřadnice	sférické souřadnice
$v_x = \dot{x}$	$v_\rho = \dot{\rho}$	$v_r = \dot{r}$
$v_y = \dot{y}$	$v_\varphi = \rho\dot{\varphi}$	$v_\vartheta = r\dot{\vartheta}$
$v_z = \dot{z}$	$v_z = \dot{z}$	$v_\varphi = r\sin\vartheta\,\dot{\varphi}$

Obloukový element křivky 3D

kartézská soustava: $\mathrm{d}s = \left((\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2\right)^{1/2}$

cylidrická soustava: $\mathrm{d}s = \left((\mathrm{d}\rho)^2 + (\rho\,\mathrm{d}\varphi)^2 + (\mathrm{d}z)^2\right)^{1/2}$

sférická soustava: $\mathrm{d}s = \left((\mathrm{d}r)^2 + (r\,\mathrm{d}\vartheta)^2 + (r\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi)^2\right)^{1/2}$

$\mathrm{d}s_i = h_i \mathrm{d}q_i$ $\quad \mathrm{d}s = \left((\mathrm{d}s_1)^2 + (\mathrm{d}s_2)^2 + (\mathrm{d}s_3)^2\right)^{1/2} = \left((h_1\mathrm{d}q_1)^2 + (h_2\mathrm{d}q_2)^2 + (h_3\mathrm{d}q_3)^2\right)^{1/2}$

h_i – Laméovy koeficienty

soustava souřadnic	h_1	h_2	h_3	q_1	q_2	q_3
kartézská	1	1	1	x	y	z
cylindrická	1	ρ	1	ρ	φ	z
sférická	1	r	$r\sin\vartheta$	r	ϑ	φ

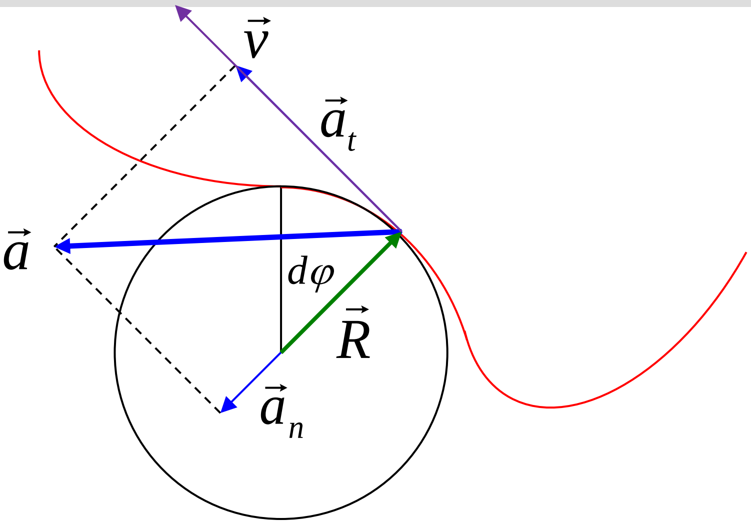
Objemový element: $\mathrm{d}V = \mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}s_3 = h_1\mathrm{d}q_1 h_2\mathrm{d}q_2 h_3\mathrm{d}q_3$

např. sférická soustava souřadnic **objemový element:** $\mathrm{d}V = r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$

plošný element na povrchu koule o poloměru r: $\mathrm{d}S = r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$

element prostorového úhlu: $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}S / r^2 = \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$

Tečné a normálové zrychlení



• **okamžité zrychlení** hmotného bodu**:**

$$\vec{a} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}$$

• **Tečné zrychlení** získáme průmětem vektoru zrychlení $\vec{a}$ do směru rychlosti $\vec{\tau}_0 = \frac{\vec{v}}{v}$ a vynásobením jednotkovým vektorem ve směru rychlosti:

$$\vec{a}_t = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v}\right)\frac{\vec{v}}{v} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} = \frac{2v_x\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}+2v_y\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}+2v_z\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}}{2\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} \quad \Rightarrow \quad a_t = \frac{dv}{dt}$$

• **Normálové zrychlení:**

$$\vec{a}_n = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{R}}{R}\right)\frac{\vec{R}}{R} \qquad a_n = \frac{v^2}{R}$$

Úhlová rychlost a zrychlení

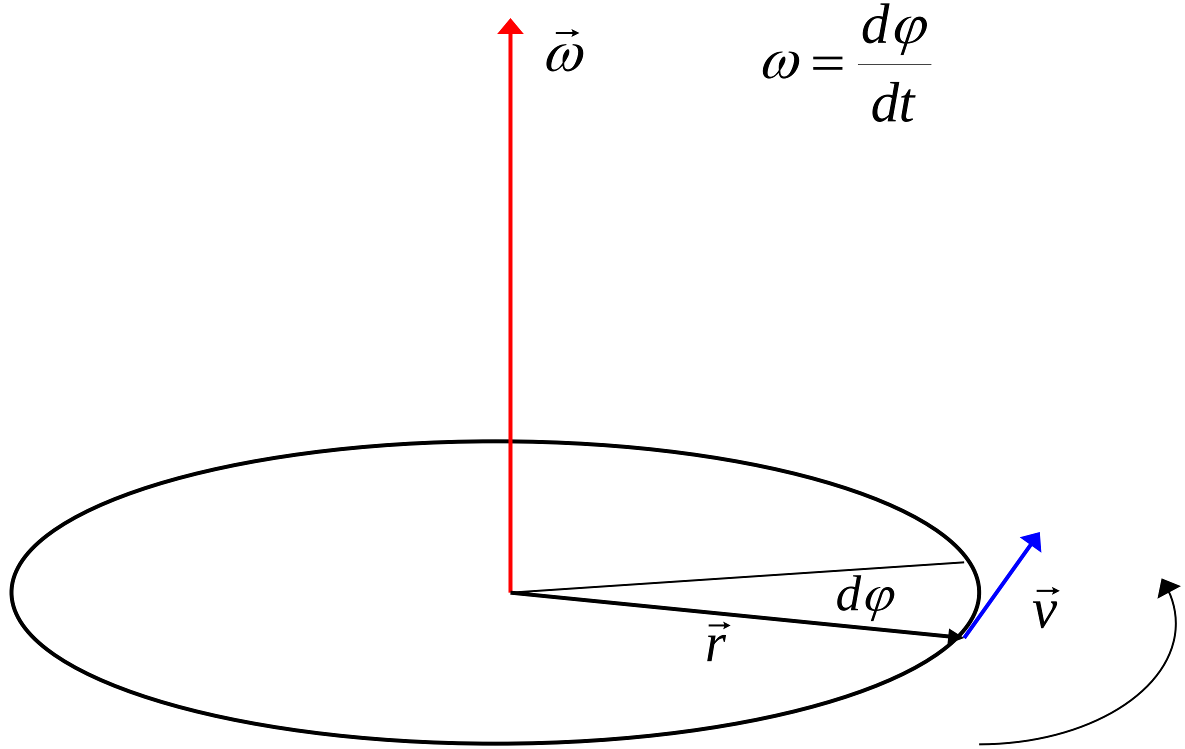
- **vektor úhlové rychlosti**

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- **úhlové zrychlení**

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{dt}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

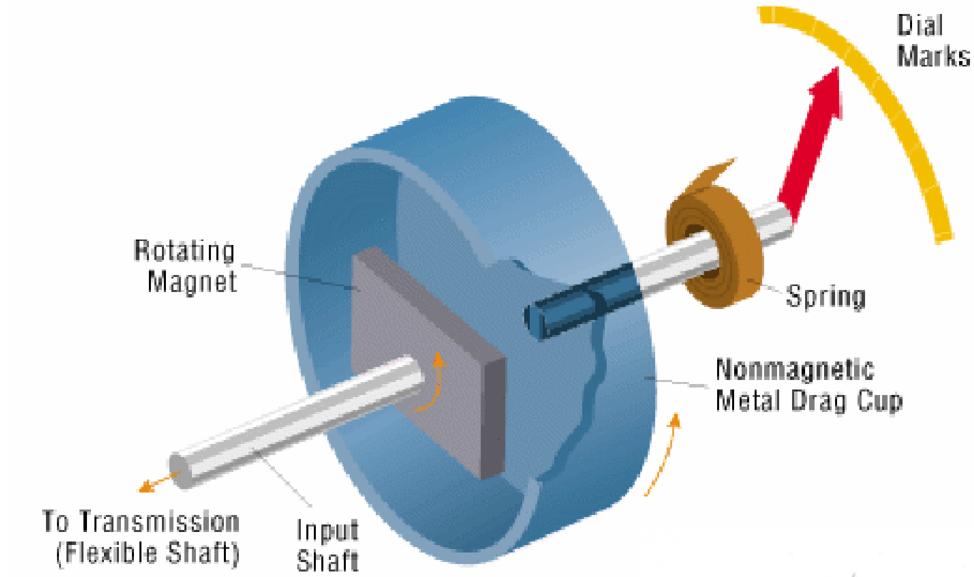


$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Tachometr

- **analogový**

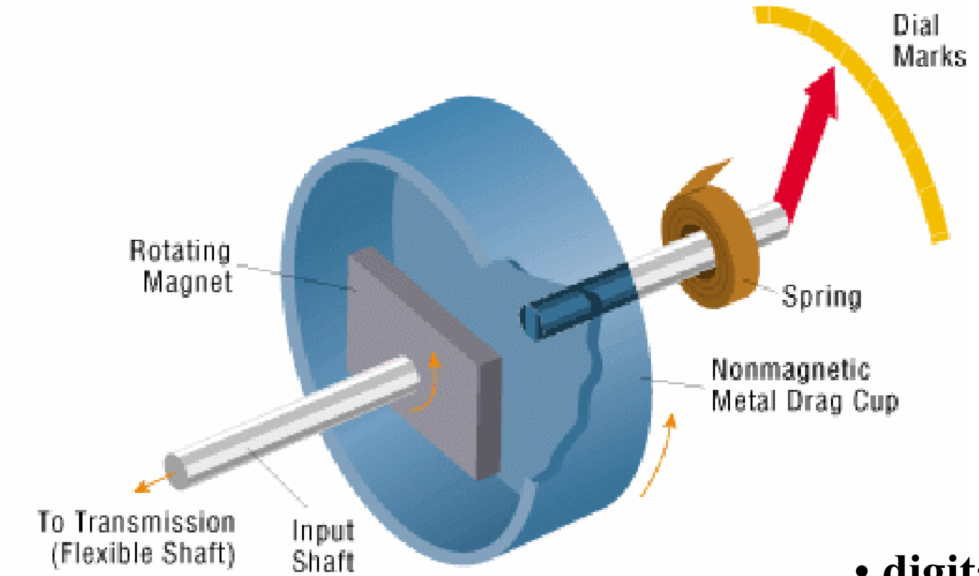
  - Otto Schulze 1902



Tachometr

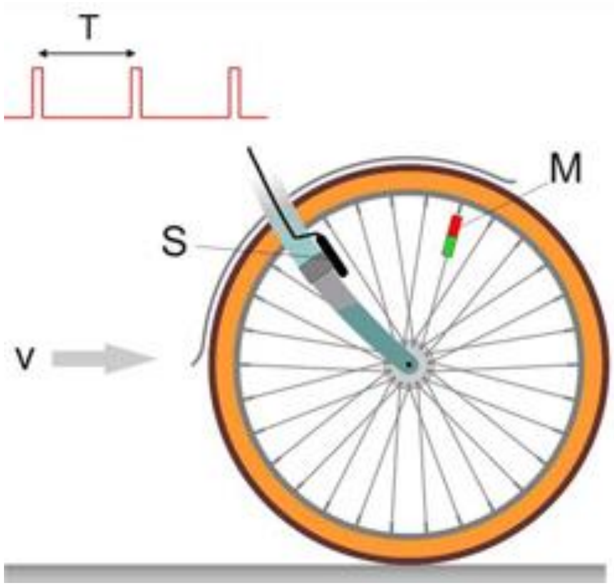
• **analogový**

- Otto Schulze 1902



• **digitální**

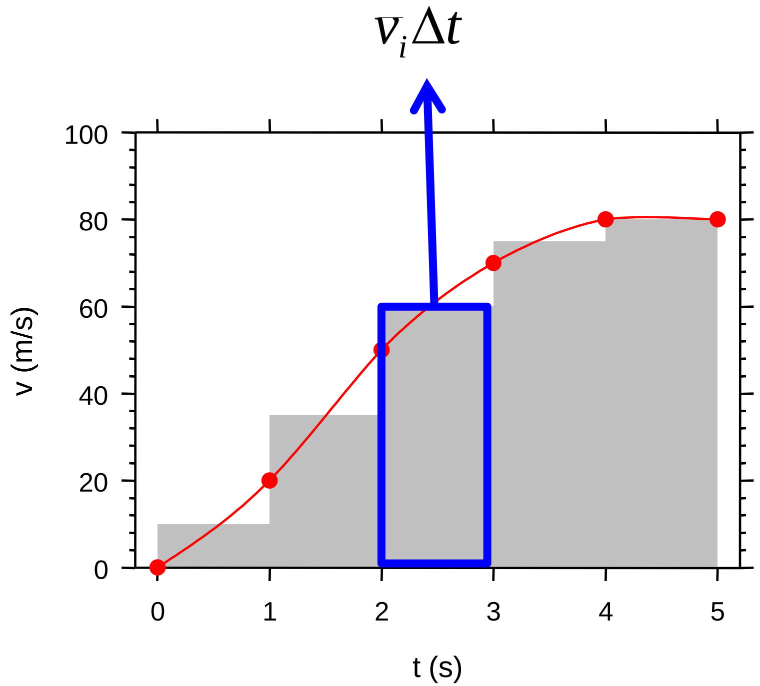
• **digitální**



Dráha

- dráha: délka trajektorie

t (s)	v (m/s)
0	0
1	20
2	50
3	70
4	80
5	80



- dráha: $s = \sum_i v_i \Delta t$

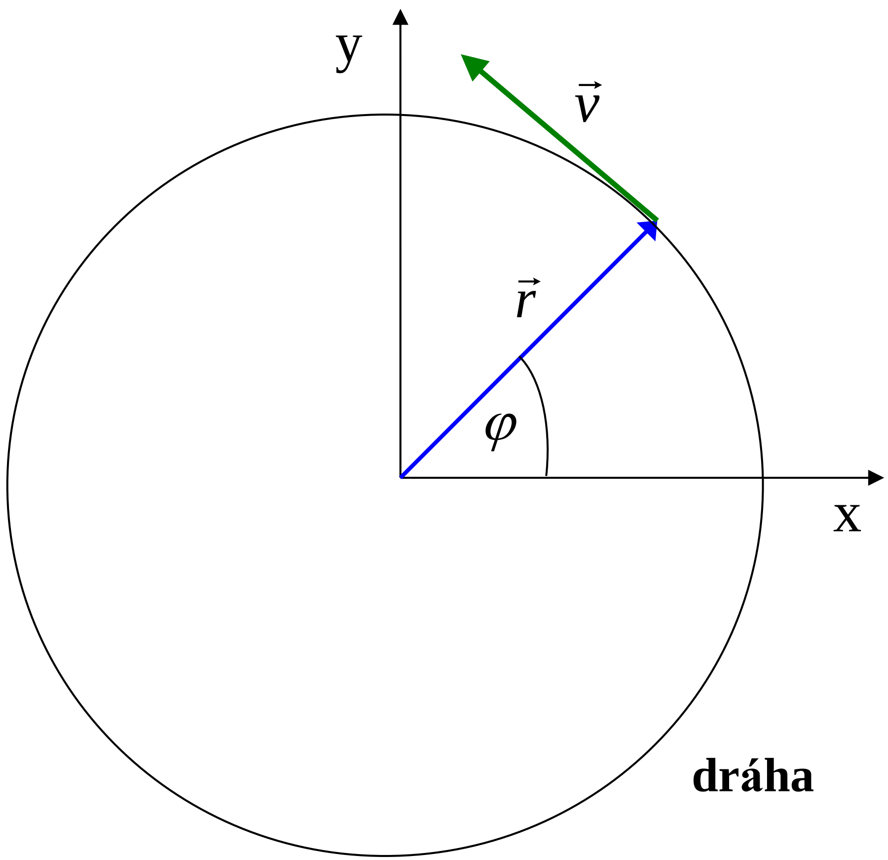
$$\Delta t \rightarrow 0 \quad s = \int v \, dt$$

Dráha

- dráha, kterou urazil hmotný bod:

$$s \equiv \int \left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right)^2 \right]^{1/2} \mathrm{d}t = \int v(t) \mathrm{d}t$$

Rovnoměrný pohyb po kružnici



kartézské souřadnice

$$x(t) = r\cos(\omega t)$$

$$y(t) = r\sin(\omega t)$$

rychlost

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = -r\omega\sin(\omega t)$$

$$v_y(t) = \dot{y}(t) = r\omega\cos(\omega t)$$

ω - úhlová rychlost

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ - perioda

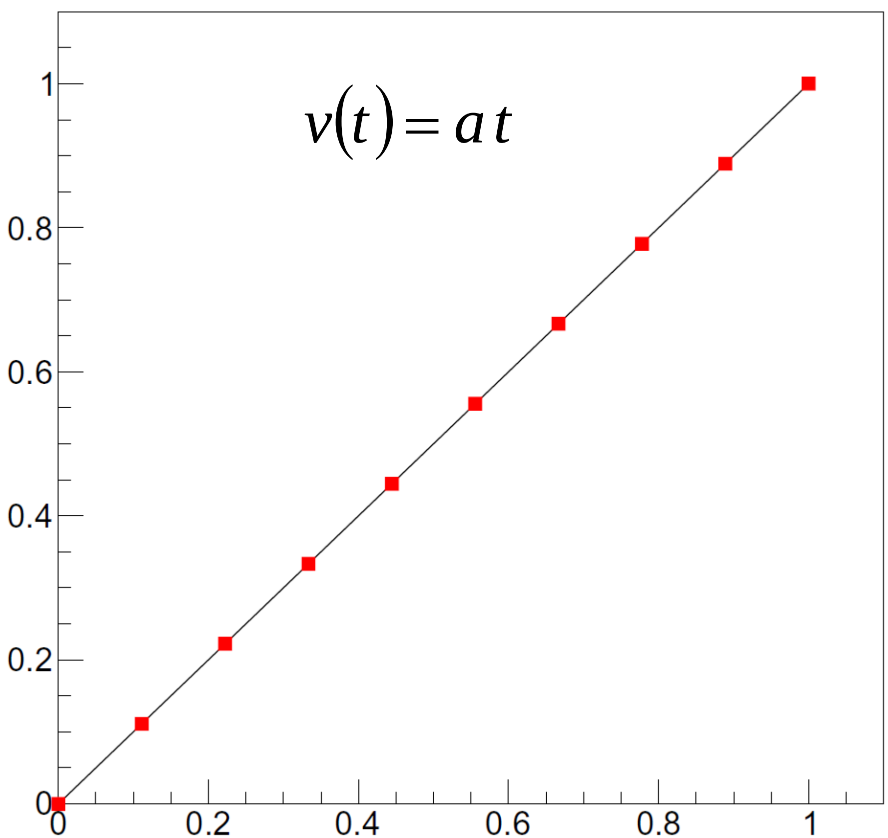
$$s = \int_0^T \left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right)^2 \right]^{1/2} \mathrm{d}t = \int_0^T r\omega \, dt = \left[\frac{2\pi\, r}{T} t \right]_0^T = 2\pi\, r$$

Numerická integrace

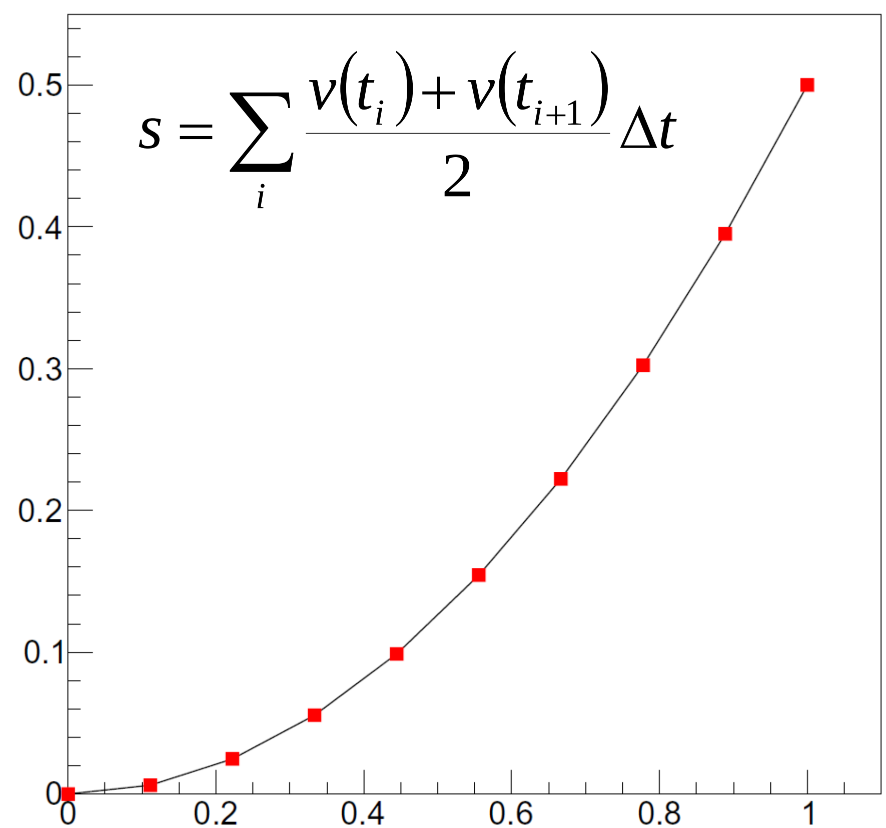
• rovnoměrně zrychlený pohyb:

$n = 10 \qquad dt = 1/9 \qquad a = 1$

časová závislost rychlosti



časová závislost dráhy

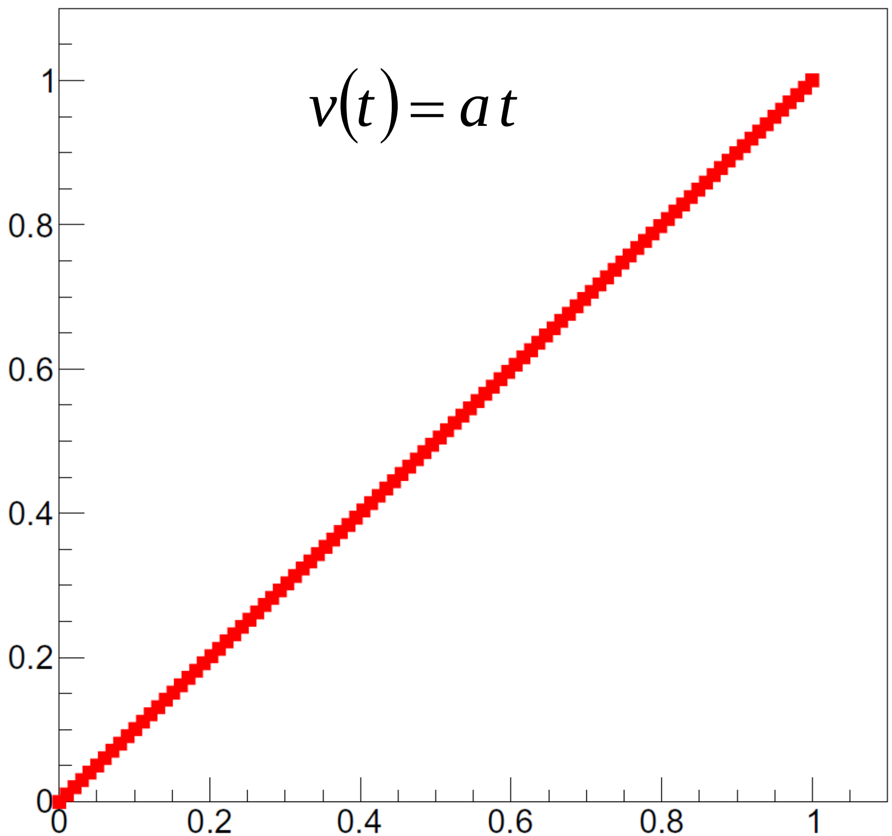


Numerická integrace

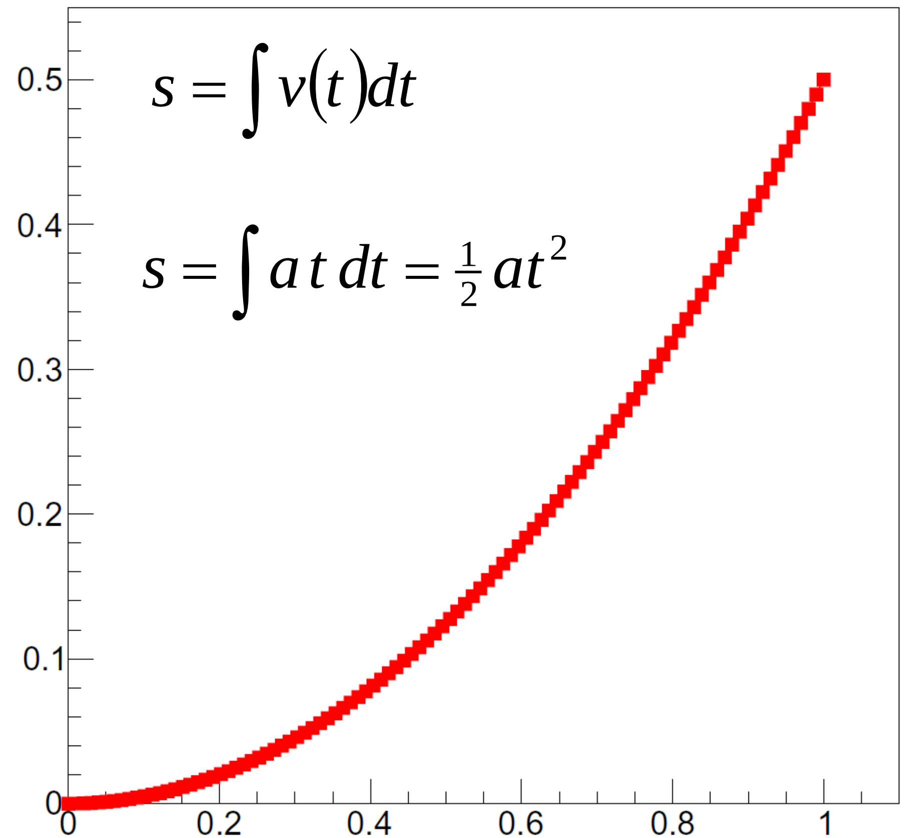
- rovnoměrně zrychlený pohyb:

$n = 100 \qquad dt = 1/99 \qquad a = 1$

časová závislost rychlosti



časová závislost dráhy

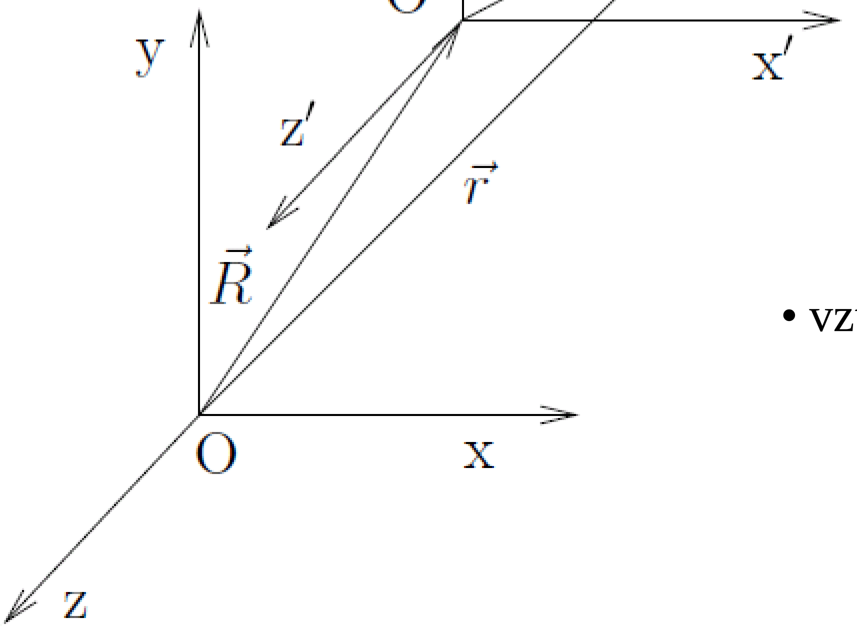


Pohyb hmotného bodu v pohybující se referenční soustavě

- kartézská soustava souřadnic *S*: *x*, *y*, *z*
- pohybující se kartézská soustava *S'*: *x'*, *y'*, *z'*
- absolutní čas:

$$t = t'$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}$$



- poloha hmotného bodu M:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$$

- rychlost hmotného bodu M:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}$$

- **unášivá, relativní** rychlost $\vec{u} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}$, $\quad \vec{v}' = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}$
- **adiční teorém** skládání rychlostí: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$

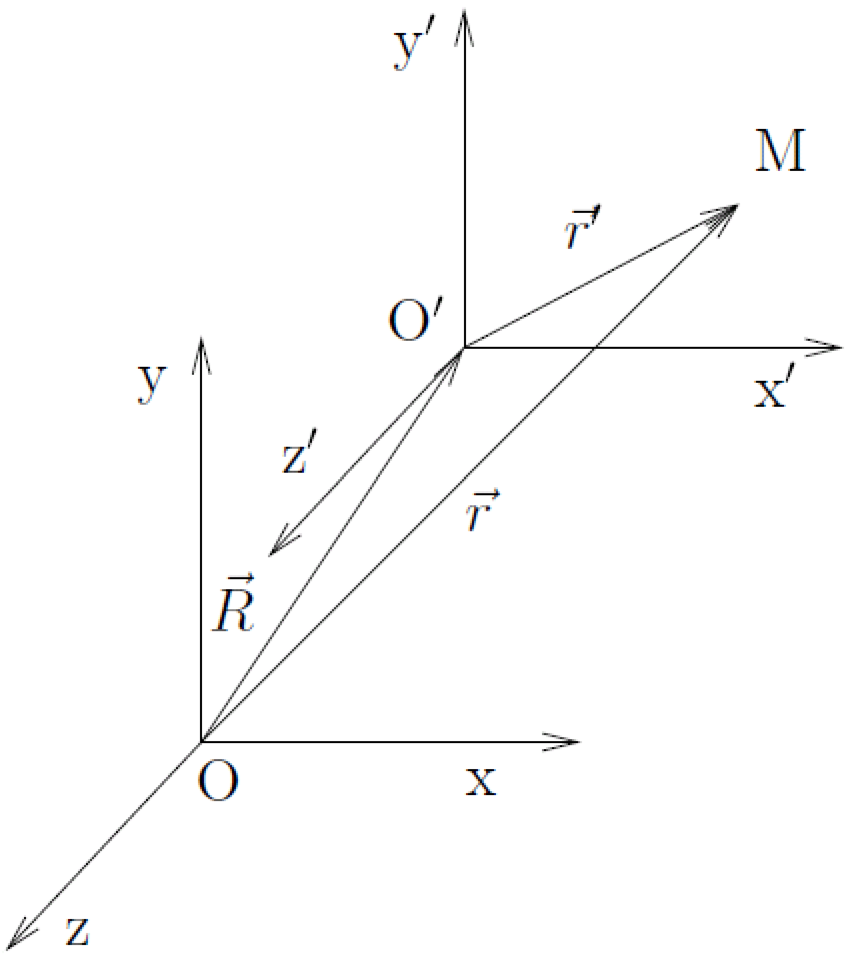
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}'}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2}$$

- vztah mezi **absolutním, relativním a unášivým zrychlením**:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_u$$

Pohyb hmotného bodu v pohybující se referenční soustavě

- kartézská soustava souřadnic *S*: *x*, *y*, *z*
- pohybující se kartézská soustava *S'*: *x'*, *y'*, *z'*



- pohyb hmotného bodu M v **inerciální soustavě**, **Gallileova transformace**:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t, \quad \vec{u} = konst$$

- rychlost hmotného bodu M:

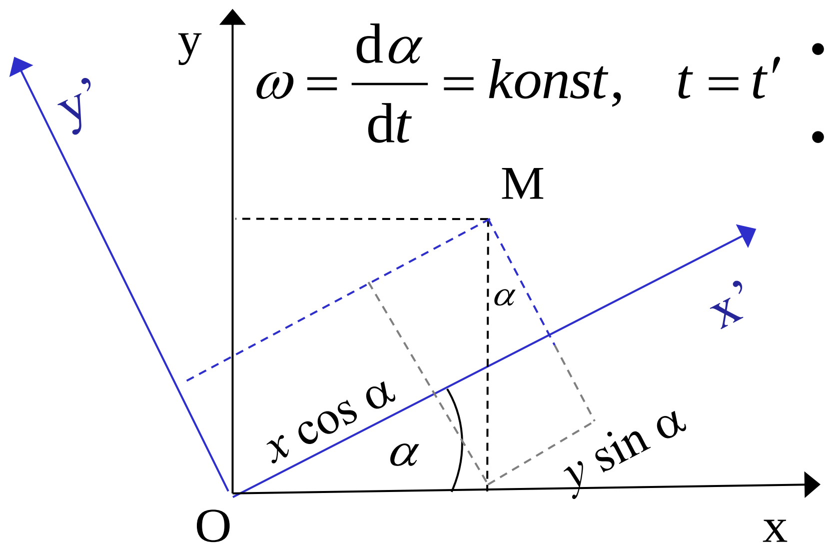
$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}$$

- Jelikož je vzájemná rychlost soustav konstantní, budou zrychlení v obou soustavách stejná:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{a}'$$

Pohyb hmotného bodu v rotující soustavě souřadné



$$\omega = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = konst, \quad t = t'$$

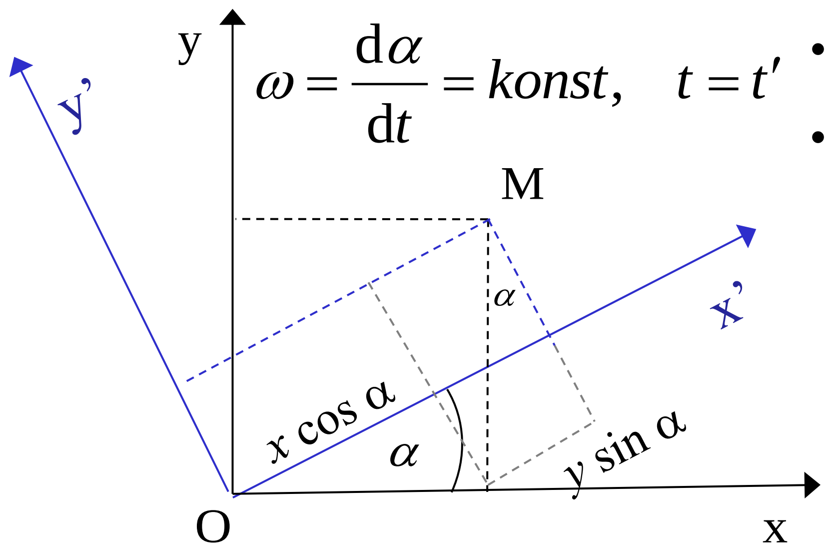
- kartézská soustava souřadnic: *x*, *y*, *z*
- kartézská soustava otáčející kolem osy *z*= *z'*: *x'*, *y'*, *z'*

$$x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t$$
$$y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t$$
$$z' = z$$

$$v'_x = \dot{x}' = v_x\cos\omega t + v_y\sin\omega t + \omega\left(-x\sin\omega t + y\cos\omega t\right)$$
$$v'_y = \dot{y}' = -v_x\sin\omega t + v_y\cos\omega t - \omega\left(x\cos\omega t + y\sin\omega t\right)$$
$$v'_z = \dot{z}' = \dot{z} = v_z$$

$$a'_x = \dot{v}'_x = a_x\cos\omega t + a_y\sin\omega t + 2\omega\left(-v_x\sin\omega t + v_y\cos\omega t\right) - \omega^2\left(x\cos\omega t + y\sin\omega t\right)$$
$$a'_y = \dot{v}'_y = -a_x\sin\omega t + a_y\cos\omega t - 2\omega\left(v_x\cos\omega t + v_y\sin\omega t\right) - \omega^2\left(-x\sin\omega t + y\cos\omega t\right)$$
$$a'_z = \dot{v}'_z = \dot{v}_z = a_z$$

Pohyb hmotného bodu v rotující soustavě souřadné



$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = konst, \quad t = t'$$

- kartézská soustava souřadnic: *x*, *y*, *z*
- kartézská soustava otáčející kolem osy *z*= *z'*: *x'*, *y'*, *z'*

$$x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t$$

$$y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t$$

$$z' = z$$

$$\omega = -\omega'$$

$$v'_x = v_x\cos\omega t + v_y\sin\omega t - \omega' y'$$

$$v'_y = -v_x\sin\omega t + v_y\cos\omega t + \omega' x'$$

$$v'_z = v_z$$

$$a'_x = a_x\cos\omega t + a_y\sin\omega t - 2\omega' v'_y + \omega'^2 x'$$

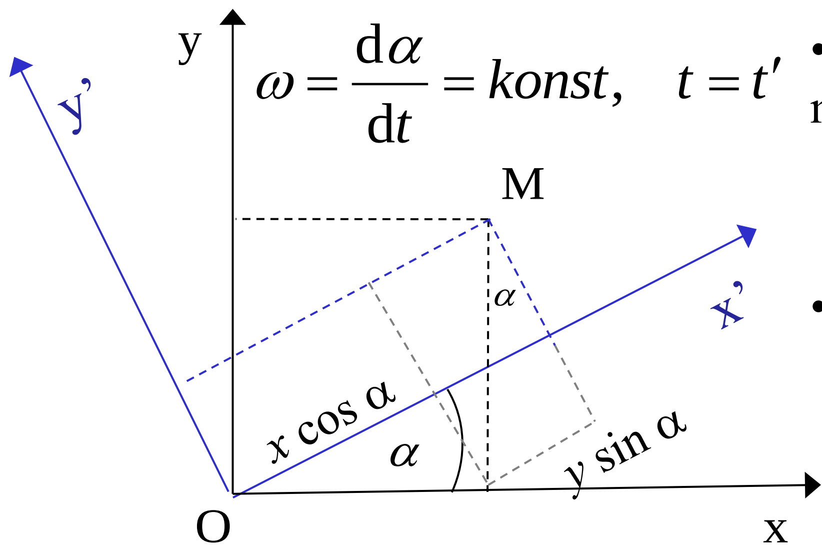
$$a'_y = -a_x\sin\omega t + a_y\cos\omega t + 2\omega' v'_x + \omega'^2 y'$$

$$a'_z = a_z$$

- složky odstředivého zrychlení: $\vec{a}_O = \left(\omega'^2 x', \omega'^2 y', 0\right)$
- složky Coriolisova zrychlení: $\vec{a}_C = \left(-2\omega' v'_y, 2\omega' v'_x, 0\right)$

Pohyb hmotného bodu v rotující soustavě souřadné

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = konst, \quad t = t'$$



• obecnou rotaci kolem libovolně orientované osy můžeme získat složením tří rotací kolem souřadných os.

$$\vec{\omega}' = \left(\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z\right)$$

• Coriolisovo zrychlení při rotaci kolem obecné osy:

$$\vec{a}_C = 2\left(\vec{\omega}' \times \vec{v}'\right) = -2\left(\vec{\omega} \times \vec{v}'\right)$$

• Coriolisovo zrychlení je tedy kolmé jak na vektor úhlové rychlosti $\vec{\omega}'$ (směr rotační osy), tak na rychlost hmotného bodu $\vec{v}'$ v rotující soustavě souřadné.

$$\vec{\omega}' = \left(0,0,\omega'_z\right)$$

$$\vec{a}_C = 2 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega'_x & \omega'_y & \omega'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \end{vmatrix} = 2 \cdot \left(\omega'_y v'_z - \omega'_z v'_y,\ \omega'_z v'_x - \omega'_x v'_z,\ \omega'_x v'_y - \omega'_y v'_x\right) = 2 \cdot \left(-\omega'_z v'_y,\ \omega'_z v'_x,\ 0\right)$$

• Odstředivé zrychlení zrychlení při rotaci kolem obecné osy: $\vec{a}_O = -\vec{\omega}' \times \left(\vec{\omega}' \times \vec{r}'\right)$